CASTELL

Novo-Duplex 2/83

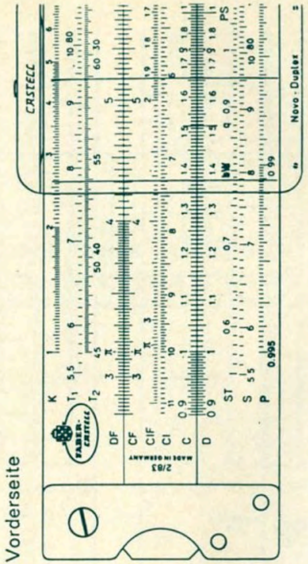
mit 25 cm Teilungslänge

Besondere Merkmale:

1 Seine abgebrochenen Skalen (W_1, W_1', W_2, W_2') verleihen ihm die Genauigkeit eines 50 cm langen Rechenstabes

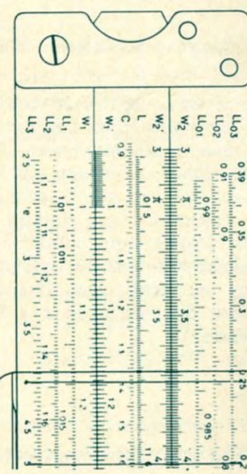
2 Die π-versetzten Skalen CF und DF sowie die reziproke π-Skala CIF erleichtern Tabellenrechnungen usw. wesentlich

3 Die zweiteilige Tangensskala T_1, T_2 reicht bis 84,3° und macht Umwege über Kofunktion und Reziprokskala überflüssig



Vorderseite

der neue Rechenstab mit der idealen Teilungszusammenstellung



Rückseite

4 Die ST-Skala besitzt neuartige Korrekturmarken für trigonometrische Berechnungen

5 Ein wesentliches Merkmal des „Novo-Duplex" sind seine 6 Exponentialskalen

6 Durch die besondere Schraubenkonstruktion der Metall-Laschen läßt sich die Schiebergügigkeit einstellen

A·W·FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

3

1962

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Der neue Castell Schul-D-Stab

von Oberstudienrat Viktor Mathé, Nürnberg

Bei der Betrachtung der einfachen Rechenstäbe aller Ausführungen bemerkt man, daß sie in zwei Leitern C und D die herkömmliche Teilung bringen. Zumeist sieht man auf der Vorderseite noch Leitern für die Quadrat- und Kubikzahlen, manchmal sogar noch eine Leiter für die Mantissen der dekadischen Logarithmen. Die trigonometrischen Funktionen erscheinen in Leitern teilweise auf der Vorderseite des Stabes angebracht, teilweise auf der Rückseite der Zunge.
Eine Häufung von Skalen auf der Vorderseite des Stabes bringt oft eine Unübersichtlichkeit, die noch hie und da durch zu kleinen Druck zur Unerträglichkeit gesteigert wird. Die Fehlerquellen vermehren sich — wie die Erfahrung im Stabrechnen zeigt — sehr erheblich. Immer wieder erhebt sich die Frage, ob Stäbe, die eine solche Vielfalt von Skalen zeigen, in die Hand von Schülern gehören. Wenn man nun nach den gemachten Erfahrungen den neuen Castell-Schulrechenstab D betrachtet, so fällt einem sofort — trotz der Vielzahl der Skalen — die große Übersichtlichkeit wohltuend auf. Ein klarer und großer Druck vermittelt ein anschauliches Skalenbild. Dies wird durch die Anordnung als Doppelstab noch gefördert. Die bisherige Verwendung dieses Doppelstabes im Unterricht zeigt die verblüffende Tatsache, daß die Schüler rascher die Grundbegriffe des Stabrechnens sich aneignen, als dies bisher mit den herkömmlichen Schulstäben der Fall war. Daher auch der Wunsch, der auf einen einheitlichen Gebrauch des Doppelstabes hinzielt.
Sieht man sich in kritischer Haltung den neuen Doppelstab an, so sieht man auf der einen Seite das klassische Prinzip des Systems Rietz. In übersichtlicher Anordnung findet man die Skalen L, K, A, B, CI, C und D, hier zuzüglich der drei Skalen LL_1, LL_2 und LL_3. Die andere Seite des Doppelstabes wiederholt die Skalen C und D. Dies erweist sich ebenso als großer Vorteil, wie der beide Seiten des Stabes umgreifende Läufer. Die um den Faktor π versetzten Skalen CF und DF stellen eine Bereicherung dar, die vom Schüler bald gerne vermerkt wird. Die Neuanordnung der trigonometrischen Skalen und der Arcus x-Skala zeigt, wie der Doppelstab an Übersichtlichkeit gewonnen hat. Das Wenden des Stabes bringt mit Hilfe des Läufers einen raschen Übergang von Skala zu Skala.

Die Skala $\sqrt{1-x^2}$ wird im Unterricht kaum vermißt, da die Skalen A und B eine rasche Umrechnung vermitteln. Überhaupt hat die Skala A im Zusammenhang mit der Skala D eine große Bedeutung bei der Berechnung nicht-rechtwinkliger Dreiecke mit Hilfe einer Umformung des Cosinus-Satzes (siehe Rechenstab-Brief Nr. 2).
Die Exponentialskalen LL_1, LL_2 und LL_3 erweitern den Rechenumfang der herkömmlichen Stäbe wesentlich. Mit ihrer Hilfe können nicht nur Werte der Exponentialfunktion e^x errechnet werden, sondern die drei Skalen bieten auch Möglichkeiten Werte von a^x, ln x, wie auch Werte der Logarithmen auf beliebiger Basis zu errechnen.

Ein Beispiel für die Funktion $y = e^x$:

Für $x = 3{,}4$ ($x = 0{,}34$) suche man auf D den Wert $x = 3{,}4$ ($x = 0{,}34$) und man findet unter dem Läuferstrich auf LL_3 den Wert $y = 29{,}9$ (auf LL_2 den Wert $y = 1{,}405$).

Ein Beispiel für die Funktion $y = \ln x$:

Für $x = 34$ suche man auf LL_3 den Wert $x = 34$. Darüber findet man unter dem Läuferstrich bei D den Wert für $y = 3{,}52$.

Ebenso können Exponentialfunktionen und Logarithmen auf beliebiger Basis a errechnet werden, z. B.: $y = a^x$.

Beispiel für $a = 4$:

Stellt man auf LL_3 den Läufer über 4 und bringt die Skala C mit 1 unter den gleichen Läuferstrich, so erhält man die Potenzen von 4.

Auf der Skala C erscheinen der Reihe nach die Potenzexponenten 1, 2, 3, 4, 5 und auf Skala LL_3 liest man darunter die Werte 4, 16, 64, 256, 1024 ab.

Will man umgekehrt Logarithmen auf Basis 4, so können sie bei gleicher Einstellung abgelesen werden.

Beispiel: Suche $y = {}^4\log 100$.

Skala C mit 1 über Skala LL_3 auf 4. Suche auf LL_3 den Wert 100. Man erhält darüber auf Skala C den Wert $y = 3{,}32$.

Ein anderes Beispiel. Es sei der Wert $y = a^x$ für $a = 17{,}5$ und $x = 2{,}4$ gesucht.

Man stelle auf LL_3 mit dem Läufer den Wert 17,5 ein und stelle die Skala C mit dem Wert 1 darüber. Verschiebt man nun den Läufer auf den Skalenwert 2,4 der Skala C, so erhält man darunter auf LL_3 den Wert $y \approx 960$ (genau 962).

Hat man schon früher mit der Einübung des Stabrechnens begonnen, so ergeben sich bei der Besprechung der Exponentialfunktionen und der Logarithmen im Unterricht günstige Auswirkungen.

Wie schon im Heft 1/1961 dieser Blätter gezeigt wurde, können nunmehr nicht nur Exponentialfunktionen und Logarithmen berechnet werden, sondern auch Zinseszins- und Rentenrechnung in das Stabrechnen einbezogen werden.

Ein Beispiel für periodische Einzahlung möge dies beleuchten:

Jemand zahlt bei $p = 3{,}5\%$ (also $q = 1{,}035$) jährlich k Mark ein. Wie groß ist der Wert E_n aller Einzahlungen unmittelbar nach der siebenten Einzahlung?

$$E_n = kq^6 + kq^5 + kq^4 + kq^3 + kq^2 + kq + k$$

$$E_n = k \cdot (q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$$

$$E_n = k \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} \qquad q = 1{,}035 \text{ und } n = 7$$

Man suche auf LL_1 den Wert $q = 1{,}035$ und bringe den Läufer darüber. Zieht man die Skala C mit 10 unter den Läuferstrich, so findet man unter C mit dem Wert 7 auf LL_2 den Wert $q^7 = 1{,}272$. Daraus ergibt sich für $q^7 - 1$ der Wert 0,272 und für $q - 1$ der Wert 0,035.

$$\text{So ist } E_7 = k \cdot \frac{0{,}272}{0{,}035} = k \cdot \frac{272}{35}; \qquad \begin{array}{l} E_7 = k \cdot 7{,}77 \\ E_7 = 7{,}77 \cdot k \end{array}$$

Die mit π vervielfachten Skalen CF und DF erleichtern das Stabrechnen sehr. Durch sie wird zumeist ein Durchschieben der Zunge um eine Dekadenlänge vermieden, wenn

ansonsten bei Einstellungen das Ergebnis außerhalb der Grundskala D zu liegen kommt. In der schon erwähnten Arbeit im Heft 1/1961 dieser Blätter wurde davon Gebrauch gemacht. Die Einbeziehung der um π versetzten Skalen ergibt eine gute Übersicht bei der Einstellung von Proportionen, da ja naturgemäß die versetzten Skalen CF und DF die gleichen Verhältnisse aufweisen, wie die Skalen C und D. So ergibt sich bei Gegenüberstellung des Wertes 1 auf Skala C und des Wertes 1,7 auf Skala D folgendes:

C	1	2	3
D	1,7	3,4	5,1

und für

CF	6,5	10	80
DF	11,05	17	136

Solche Umrechnungen finden sich im Unterricht wie im praktischen Leben, z. B. der Übergang von einer Währung zur anderen. So war vor der Währungsänderung der Wert von 1 DM gleich 1,7 norwegischer Kronen. Daraus ergibt sich aus dem vorhergehenden Beispiel, daß man für 80 DM 136 norwegische Kronen erhielt. Ebenso vereinfacht sich die Rechnung beim Übergang von einem Maßsystem zum anderen. So entspricht 1 inch gleich 25,4 mm. Man findet daher

C	1	2	und	9	auf CF
D	25,4	50,8		229	auf DF

Auch bei fortlaufenden Multiplikationen und Divisionen erweist sich der Übergang auf die versetzten Skalen als vorteilhaft. Kreisberechnungen können mit Hilfe der versetzten Skalen leicht durchgeführt werden.

Z. B. Es soll der Umfang eines Kreises mit $r = 3$ errechnet werden. $u = 2r\pi$.
Stellt man C mit dem Wert 1 über D mit dem Wert 3, so erhält man über C mit dem Wert 2 auf DF sofort den Wert für den Umfang mit $u = 18{,}8$.

Außerordentlich vorteilhaft und übersichtlich sind auch die Winkelfunktionen in ihren Werten angebracht. Auf der Skala S findet man die Funktion $y = \sin x$ für Werte von $x = 6$ Grad bis $x = 80$ Grad einwandfrei. Für kleinere Werte als $x = 6$ Grad ist der Übergang auf die Skala ST angebracht. Die Werte der Tangensfunktion sind auf zwei Skalen T_1 und T_2 übersichtlich für $x = 6$ Grad bis $x = 45$ Grad und $x = 45$ Grad bis $x = 84$ Grad angebracht. Die Cofunktionen sind in ihren Winkelwerten mit roter Ziffer eingetragen.

Noch erwähnt soll die grüne Tönung des Untergrundes bei den Hauptskalen werden. Diese Tönung trägt wesentlich mit bei, das Skalenbild übersichtlich zu gestalten.

Zur Anwendung des Rechenstabes in der Seefahrt

von Studienrat E. Kegel, Bremen

Dort, wo das Rechnen mit dem Rechenstab eine logarithmische oder numerische Rechnung ersetzt, liegt der Zeitgewinn neben anderen Vorteilen auf der Hand. Anders ist es, wenn, wie das bei der Seefahrt der Fall ist, im Laufe einer historischen Entwicklung zahlreiche spezielle Tafeln geschaffen und eingeführt worden sind, die das Rechnen bereits erleichtern. Wenn es dann beim Stabrechnen keine neuen Vorteile gibt oder diese nur bei dauernder intensiver Übung zu Tage treten, wird der ausgebildete Nautiker auf sich gestellt den Rechenstab nicht benutzen, wenn für die betreffende Aufgabe eine Tafel existiert.

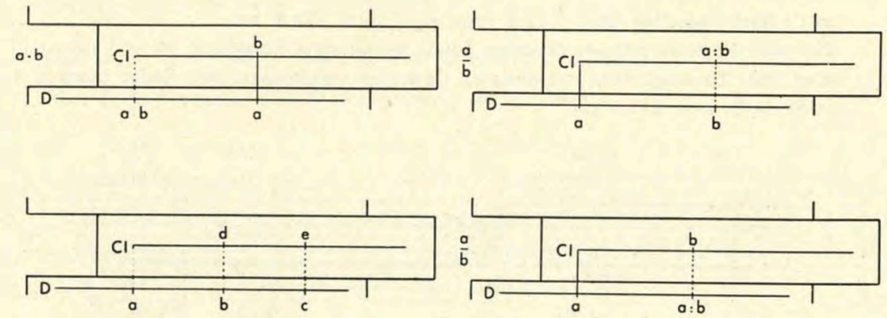
Nun wird heute der Rechenstab an Bord gewiß weniger oft verwendet, als es der mögliche Nutzen erwarten läßt, und zwar auch von den Nautikern, die im Laufe ihrer Ausbildung im Stabrechnen unterrichtet wurden. Während einfache Multiplikationen und Divisionen häufig mit dem Rechenstab ausgeführt werden, wird von vielen Nautikern bei etwas komplizierteren Aufgaben, wie zum Beispiel bei der Besteckrechnung, lieber die Tafel benutzt. Der Grund dazu liegt größtenteils sicher darin, daß zwar derartige Aufgaben von einem versierten Rechner einfach gelöst werden können, aber die Einstellschemata je nach dem benutzten System so vielfältig sind, daß ein Nautiker, der mit vielen anderen nichtmathematischen Aufgaben befaßt ist, sie kaum im Gedächtnis behalten kann. Für eine Verwendung an Bord ist es aber notwendig, daß alle Rechnungen ohne Vorüberlegungen und schematisch ablaufen.

Zu einer Verminderung der Anzahl der Einstellschemata tragen einmal die Art und Anordnung der Skalen des benutzten Systems bei. Offenbar ist das Symstem Darmstadt für die Aufgaben der Seefahrt praktischer als das System Rietz. Auch werden viele der vorkommenden Aufgaben durch die reziproken Skalen erleichtert. Schließlich vereinfacht die zweite Tangens-Skala T_2 die in der Nautik relativ oft auftretenden trigonometrischen Rechnungen erheblich.

Eine weitere entscheidende Vereinfachung ergibt sich aber, wenn man nach Auswahl eines geeigneten Rechenstab-Systems die vorkommenden Aufgaben hinsichtlich der Lösungswege einer ordnenden methodischen Betrachtung unterzieht und sich bei der Einführung des Stabrechnens im Unterricht darauf einstellt. Mit dem Ziel einer solchen Ordnung soll hier zunächst der Lösungsweg der Aufgaben Besteckrechnung an den Anfang einer Reihe von Beispielen gestellt werden. Die Besteckrechnung, die sich aus vielen Gründen zur Bearbeitung mit dem Rechenstab geradezu aufdrängt, kann in den meisten Fällen vollständig mit einer Einstellung gelöst werden, wenn man von gelegentlich notwendigem „Durchschlagen der Zunge" absieht. Da bei diesen Aufgaben, wenn man das Ergebnis in einer Einstellung erhalten will, eine Variation des Rechenschemas kaum möglich ist, sollte man die diesem Schema eigentümlichen Rechenschritte auch bei allen anderen Aufgaben anwenden, so daß der Lernende schließlich nur eine sehr begrenzte Anzahl von Einstellungen im Gedächtnis behalten muß.

Charakteristisch für den unten angegebenen Lösungsweg der Aufgaben der Besteckrechnung und ähnlicher Aufgaben von der Form $x = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\cos \beta}$ mit veränderlichem Nenner

ist die Multiplikation mit der Skala CI und eine Division, bei der über dem Divisor in den festen Skalen D, S oder T der Wert des Quotienten in der beweglichen Skala CI abgelesen wird. Außerdem ist bei der Besteckrechnung noch eine Aufgabe von der Form $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} \cdot \sin \alpha$ zu lösen, bei der der Divisor in CI eingestellt wird. Da sich alle anderen vorkommenden Aufgaben nach einem im Prinzip gleichen Schema lösen lassen, sollte man diesen Lösungsweg auch immer einschlagen. In einigen Abbildungen ist dieser für die einfachsten Rechnungen angedeutet:



b·d = c·e = konstant = a

Fig. 1

Wenn diese Verfahren auf den ersten Blick bei solchen Aufgaben etwas umständlich zu sein scheinen so ist es doch für den weniger geübten Rechner eine große Erleichterung, alle vorkommenden Aufgaben dann mit nur sehr wenigen Einstellschemata lösen zu können. Dieser Vorteil hebt auch wohl den Nachteil auf, daß die versetzten Skalen zunächst außer Betracht bleiben, zumal fortlaufende Multiplikationen mit einem Faktor und derartige Aufg ben bei der Seefahrt nicht oft vorkommen.

Die nachstehend angegebenen Beispiele sollen den vorgeschlagenen Lösungsweg verdeutlichen, sie sind nur unter diesem Gesichtspunkt ausgewählt. Bei den Aufgaben, die bei konsequenter Durchführung des Gedankens mit der BI-Skala gerechnet werden könnten, ist ein zweiter Weg angegeben, bei dem die Skala BI vermieden, aber doch mit den hier herausgestellten Schemata gearbeitet wird

Ohne Skala T_2 sind d'e Aufgaben, bei denen der Tangens eines Winkels vorkommt, nicht n dieser einfachen Weise lösbar.

1. Besteckrechnung (M ttelbreite)

   a) Bei bekanntem Abfahrtsort (φ_1, λ_1) berechnet man aus dem Kurswinkel (α) und der abgelaufenen Distanz (d) den entsprechenden Breitenunterschied (b) und Längenun erschied (l) nach

   $b = d \cdot \cos \alpha$ und $l = d \cdot \sin \alpha \cdot \sec \varphi_m$ wobei $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi_1 + \frac{b}{2}$

Damit man beide Größen mit einer Einstellung erhält, formt man zum Rechnen mit dem Rechenstab um:

$$b = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\tan \alpha} \quad \text{und} \quad l = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\cos \varphi_m} \quad \text{bzw.} \quad b \cdot \tan \alpha = l \cdot \cos \varphi_m = d \cdot \sin \alpha$$

Beispiel: $\varphi_1 = 50^0\,32'$ N; $d = 125$ sm; Kurs N 64^0 E.

Man stellt CI 125 über S 64^0.

Mit dem Läufer findet man unter T_2 64^0 in CI $b = 54{,}8'$ und bildet damit

$$\varphi_m = \varphi_1 + \frac{b}{2} \approx 51{,}0^0.$$

In CI liest man über $90\text{-}\varphi_m$ in S ($\cos \varphi_m$) $l = 178{,}6'$ ab.

Die beim Rechnen mit den üblichen Tafeln verwendete Abweitung ($a = l \cdot \cos \varphi_m$) wird nicht benötigt. Wer mit anderen Rechnern vergleichen will, findet unter C 1 in Skala D $a = 112{,}3$ sm.

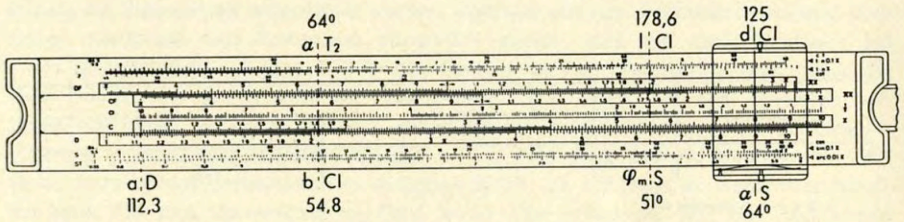


Fig. 2

b) Bei der Umkehrung der Aufgabe sind der Ausgangsort und der erreichte Ort und damit der Breiten- und Längenunterschied gegeben. Man berechnet den Kurswinkel und die Distanz nach den Formeln

$$\tan \alpha = \frac{l \cdot \cos \varphi_m}{b} \quad \text{und} \quad d = l \cdot \cos \varphi_m \cdot \operatorname{cosec} \alpha,$$

$$\text{bzw. } b \cdot \tan \alpha = l \cdot \cos \varphi_m = d \cdot \sin \alpha.$$

Man gewinnt beide gesuchte Größen wieder mit einer Einstellung.

Beispiel: $b = 40{,}6'$; $l = 220'$; $\varphi_m = 50^0$.

Man bringt CI 220 über $90^0\text{-}\varphi_m$ in S ($\cos \varphi_m$).

Mit dem Läufer findet man über CI 40,6 in T_2 ($l > b$) $\alpha = 74^0$.

Über diesem Winkel in S liest man in CI $d = 147$ sm ab.

Auch bei diesem Rechenweg hat man unter C 1 in Skala D die Abweitung zur Verfügung ($a = 141{,}4$ sm).

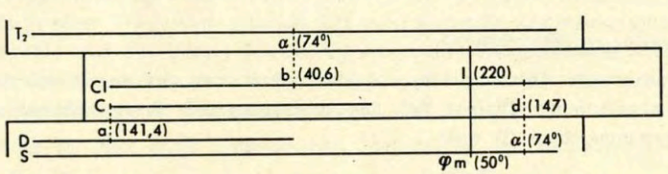


Fig. 3

2. Nebenmeridianazimut

In der Nähe des Meridians gilt

$$Az = \frac{\tau}{4}\,\frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \quad \text{bzw.} \quad Az \cdot \sin(\varphi - \delta) = \frac{\tau}{4} \cos \delta$$

Dabei ist τ der Zeitunterschied zwischen der Beobachtung und dem Meridiandurchgang in Zeitminuten und δ die Deklination oder Abweichung. Die Differenz $\varphi - \delta$ ist unter Berücksichtigung der Namen von Deklination und Breite zu bilden. Der Name des Azimuts ergibt sich aus der Beobachtung.

Beispiel: $\delta = 26{,}5^0$ N; $\varphi = 12{,}2^0$ S; $\tau = 7{,}4$ Minuten.

Man stellt $\frac{\tau}{4} = 1{,}85$ in Skala CI über S $90^0 - 26{,}5^0$ ($\cos \delta$).

Über S $38{,}7^0$ erscheint in CI das Ergebnis $Az = 2{,}64^0$.

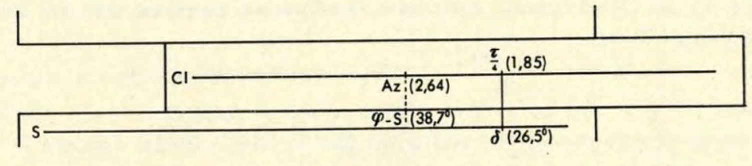


Fig. 4

3. Berechnung des Azimuts

Es ist sicher nützlich, das Azimut gelegentlich mit dem Rechenstab zu berechnen, um dabei das Dividieren trigonometrischer Funktionen zu üben. Wenn man ein genaueres Azimut braucht und in ungünstigen Bereichen der „ABC-Tafel" in zwei Richtungen interpolieren müßte, rechnet man aber außerdem mit einem Rechenstab mit einer T_2-Skala auch offensichtlich schneller als mit der Tafel.

Das Einstellschema ist im Prinzip das gleiche wie bei der Besteckrechnung. Bezeichnet man den Stundenwinkel mit t, so gilt:

$$\overset{A}{-\frac{\tan \varphi}{\tan t}} + \overset{B}{\frac{\tan \delta}{\sin t}} = \overset{C}{\sec \varphi \cdot \cot Az} \quad \text{bzw.} \quad \cos \varphi \cdot (A + B) = \cot Az$$

Beispiel: $\varphi = 51{,}4^0$ N; $t = 13{,}2^0$; $\delta = 35{,}4^0$ N.

A: CI 10 unter T_2 $51{,}4^0$,
ablesen in CI unter T_1 $13{,}2^0$ gibt 5,34.

B: CI 1 unter T_1 $35{,}4^0$,
ablesen in CI über S $13{,}2^0$ gibt 3,11.

C: Die Differenz beträgt $-2{,}23$.

CI 2,23 über S $90^0 - 51{,}4^0$ ($\cos \varphi$), ablesen in T_2 über CI 10 gibt $35{,}7^0$.
Das negative Vorzeichen der Differenz besagt, daß es sich um ein südliches Azimut handelt.

4. Ermittlung der Rollzahl (Kempf)
Für die Rollzahl z gilt

$$z = \frac{3{,}1 \cdot T\varphi}{\sqrt{B}} \quad \text{bzw.} \quad z \cdot \sqrt{B} = 3{,}1 \cdot T\varphi$$

Dabei ist $T\varphi$ die Eigenrollperiode und B die Breite des Schiffes in der CWL.
Beispiel: $T\varphi = 14$ sec; $B = 17$ m
Man stellt CI 14 über D 3,1 und liest unter A 17 in Skala CI das Ergebnis $z = 10{,}5$ ab.

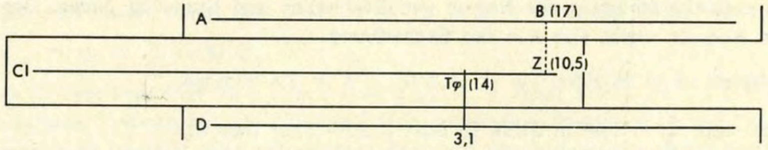


Fig. 5

5. Berechnung des f-Wertes.
Den durch die „Weiß-Formel" definierten Koeffizienten berechnet man mit seiner Definitionsgleichung:

$$f = \frac{T\varphi \sqrt{MG}}{B} \qquad MG = \text{metazentrische Höhe}$$

Beispiel: $T\varphi = 15{,}2$ sec; $B = 10{,}6$ m; $MG = 0{,}28$ m
Man bringt BI 0,28 über D 15,2 und erhält über D 10,6 in CI das Ergebnis $f = 0{,}76$.

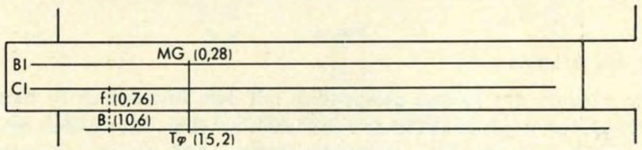


Fig. 6

Ohne BI Skala:
CI 15,2 unter A 0,28, ablesen in D unter CI 10,6.

6. Rollversuch
Man berechnet die metazentrische Höhe nach der unter 5. angegebenen Formel, die nach MG aufgelöst wird:

$$MG = \left(\frac{f \cdot B}{T\varphi}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{MG} \cdot T\varphi = f \cdot B$$

Beispiel: $B = 11$ m; $f = 0{,}74$; $T\varphi = 13{,}8$ sec.
Man bringt CI 11 über D 0,74, mit dem Läufer liest man über D 13,8 in BI das Ergebnis $MG = 0{,}348$ m ab.

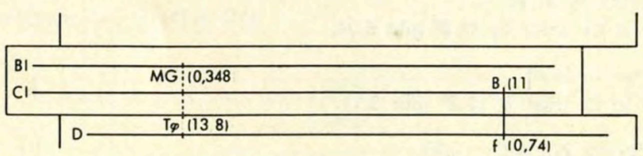


Fig. 7

Ohne BI Skala stellt man die Zunge in der gleichen Weise ein und liest aber das Ergebnis in Skala A über CI 13,8 ab.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen am Rechenstab

von Ing. H. Bachmann

Das Rechnen mit komplexen Zahlen hat in der Vektorrechnung und speziell in der Elektrotechnik so große Bedeutung erlangt, daß eine Behandlung dieses Gebietes unter Anwendung des Rechenstabes als unbedingt erforderlich angesehen werden muß.

Der Vorteil der komplexen Rechnung ist in der günstig gestalteten Behandlung geometrischer Vektorbeziehungen in rein algebraischer Weise erkennbar.

Die komplexe Zahl $\mathfrak{z} = r \cdot e^{j\varphi} = a + j\,b$ wird bekanntlich in der Gauß'schen-Zahlenebene als Punkt $\mathfrak{z}$ mit den Koordinaten a und b oder als vom Nullpunkt ausgehender Vektor zu diesem Punkt $\mathfrak{z}$ dargestellt.

Gemäß Fig. 1 gilt somit:

$$\mathfrak{z} = a + j\,b = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$
$$= r\,\underline{/\varphi} = r \cdot e^{j\varphi}$$

a = Realteil; b = Imaginärteil
r = Betrag; φ = Argument
$\underline{/\varphi}$ = Vektor φ

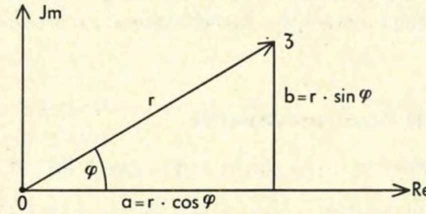
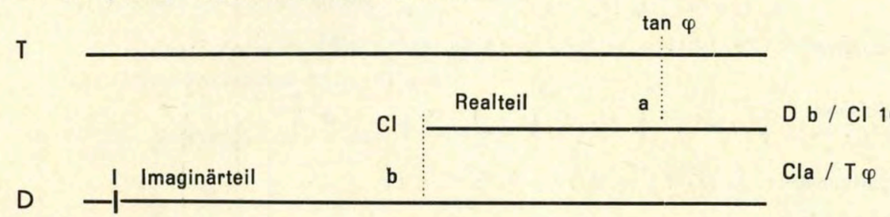


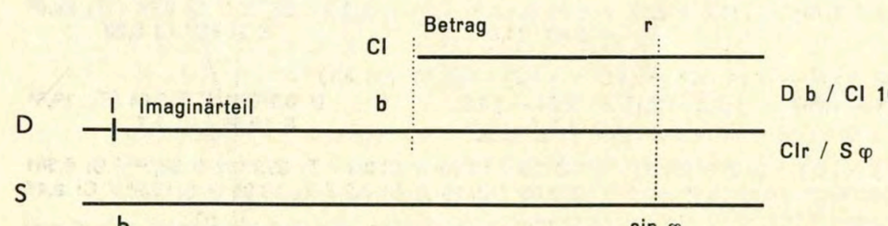
Fig. 1

Da fur die Addition und Subtraktion die algebraische Schreibweise $a + j\,b$ und für das Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Logarithmieren die Exponentialform $r \cdot e^{j\varphi}$ bzw. $r\,\underline{/\varphi}$ günstiger ist, wird ständig ein Umrechnen von einer in die andere Form erforderlich, was mit dem Rechenstab nach dem Schema gemäß Fig. 2 und 3 besonders günstig vorgenommen werden kann.



$\frac{b}{a} = \tan\varphi$ bzw. $\tan\varphi \cdot a = b$

Fig. 2



$\frac{b}{r} = \sin\varphi$ bzw. $\sin\varphi \cdot r = b$

Fig. 3

Beispiele: $\mathfrak{z} = a + jb = 4 + j3$; D 3 / Cl 10 ‖ Cl 4 / T_1 **36,9°**
$\mathfrak{z} = 5\,\underline{/36{,}9^0}$ ‖ S 36,9° / **Cl 5**

$\mathfrak{z} = a + jb = 0{,}51 - j\,1{,}55$; D 1,55 / Cl 10 ‖ Cl 0,51 / T_2 **71,8°**
$\mathfrak{z} = 1{,}63\,\underline{/-71{,}8^0}$ ‖ S 71,8° / Cl **1,63**

$\mathfrak{z} = 4\,\underline{/30^0}$ S 30° / Cl 4 ‖ Cl 10 / **D 2**
$\mathfrak{z} = 3{,}47 + j\,2$ ‖ T_1 30° / Cl **3,47**

Die Umformung $r\,\underline{/\varphi}$ in $a + j\,b$ kann auch ebenso einfach mit der Einstellung:

C r / D 10 // S φ / C b und S (90—φ) / C a

erfolgen; doch ist es zweckmäßiger, mit dem für beide Umrechnungsfälle gültigen, eingangs erwähnten Rechenschema zu arbeiten.

Die Grundrechnungsarten:

Addition $(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$

Subtraktion $(a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j\,(b_1 - b_2)$

Multiplikation $r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1\,\underline{/\varphi_1} \cdot r_2\,\underline{/\varphi_2} = r_1 \cdot r_2\,\underline{(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 \cdot r_2\, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Division $\dfrac{r_1\, e^{j\varphi_1}}{r_2\, e^{j\varphi_2}} = \dfrac{r_1\,\underline{/\varphi_1}}{r_2\,\underline{/\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\underline{/\varphi_1 - \varphi_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Potenzieren $(r\, e^{j\varphi})^n = (r\,\underline{/\varphi})^n = r^n\,\underline{/n\varphi} = r^n \cdot e^{jn\varphi}$

Radizieren $\sqrt[n]{r\, e^{j\varphi}} = \sqrt[n]{r\,\underline{/\varphi}} = \sqrt[n]{r}\;\underline{/\tfrac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\frac{\varphi}{n}}$

Logarithmieren $\ln\,(r e^{j\varphi}) = \ln r\,\underline{/\varphi} = \ln r + j\varphi$

Beispiele:

$4{,}46\,\underline{/15{,}6^0} + 2{,}74\,\underline{/50^0}$; S 15,6° / Cl 4,46 // Cl 10 / D **1,2** // T_1 15,6° / Cl **4,3**
$(4{,}3 + j1{,}2) + (1{,}76 + j2{,}1)$ S 50°/Cl 2,74 // Cl 10/D **2,1** // Cl 1/D 2,1 // T_2 50°/Cl **1,76**

$(4{,}3 + 1{,}76) + j\,(1{,}2 + 2{,}1) = 6{,}06 + j\,3{,}3$; D 3,3 / Cl 10 // Cl 6,06 / T_1 **28,6°**
$= 6{,}89\,\underline{/28{,}6^0}$ S 28,6° / Cl **6,89**

$4{,}46\,\underline{/15{,}6^0} - 2{,}74\,\underline{/50^0} = (4{,}3 + j\,1{,}2) - (1{,}76 + j\,2{,}1)$
$(4{,}3 - 1{,}76) + j\,(1{,}2 - 2{,}1) = 2{,}54 - j\,0{,}9$; D 0,9/Cl 1 // Cl 2,54 / T_1 **19,5°**
$= 2{,}7\,\underline{/-19{,}5^0}$ S 19,5° / Cl **2,7**

$(0{,}3 + j\,0{,}2) \cdot (8{,}2 + j\,2{,}03)$ D 0,2 / Cl 10 // Cl 0,3 / T_1 33,7° // S 33,7° / Cl **0,361**
$0{,}361\,\underline{/33{,}7^0} \cdot 8{,}45\,\underline{/13{,}9^0}$ D 2,03 / Cl 10 // Cl 8,2 / T_1 13,9° // S 13,9° / Cl **8,45**

$0{,}361 \cdot 8{,}45\,\underline{/33{,}7^0 + 13{,}9^0} = 3{,}05\,\underline{/47{,}6^0}$ S 47,6 / Cl 3,05 // Cl 10 / D **2,25**
$= 2{,}06 + j\,2{,}25$ Cl 1 / D 2,25 // T_2 47,6° / Cl **2,06**

$(0{,}3 + j\,0{,}2) : (8{,}2 + j\,2{,}03) = 0{,}361\,\underline{/33{,}7^0} : 8{,}45\,\underline{/13{,}9^0}$
$\dfrac{0{,}361}{8{,}45}\,\underline{/33{,}7^0 - 13{,}9^0} = 0{,}0427\,\underline{/19{,}8^0}$ S 19,8° / Cl 0,0427 // Cl 10 / D **0,01445**
$= 0{,}0402 + j\,0{,}01445$ // T_1 19,8° / Cl **0,0402**

$(2 + j1)^3 = (2{,}23\,\underline{/26{,}6^0})^3$ D 1 / Cl 10 // Cl 2 / T_1 **26,6°** // S 26,6° / Cl **2,23**
$2{,}23^3\,\underline{/3 \cdot 26{,}6^0} = 11{,}1\,\underline{/79{,}8^0} = 1{,}97 + j\,10{,}91$ S 79,8° / Cl 11,1 // Cl 10 / D **10,91**
// T_2 79,8° / Cl **1,97**

$\sqrt[3]{11{,}1\,\underline{/79{,}8^0}} = \sqrt[3]{11{,}1} \cdot \underline{/\tfrac{79{,}8^0}{3}} = 2{,}23\,\underline{/26{,}6^0}$

$\ln\,(4 + j\,3) = \ln\,(5\,\underline{/36{,}9^0})$ D 3 / Cl 10 // Cl 4 / T_1 **36,9°**
// S 36,9° / Cl **5**

$\ln 5 + j\,\widehat{36{,}9^0} = 1{,}608 + j\,0{,}644$ LL_3 5 / D 1,608; ST 36,9° / C **0,644**

Anwendung:

1. Für eine Wirkleistung von 570 kw und eine Blindleistung von 350 Bkw ist die Scheinleistung und der Leistungsfaktor cos φ zu ermitteln.

   $N_s = N_w + j\,N_b = 570 + j\,350$ D 350 / Cl 10 // Cl 570 / T_1 31,6°
   S 31,6° / Cl 667 und P 0,852;

   somit ist N_s = 667 kVA und cos φ = 0,852.
   Bei Rechenstäben ohne P-Skala findet man cos φ bei S (90—φ) / D 0,852.

2. An einer Wechselstromspannung von 220 V (f = 50 Hz) ist ein Ohmscher-Widerstand R = 20 Ω, eine Induktivität L = 0,25 H und eine Kapazität C = 35 μF in Reihenschaltung angeschlossen.

   Ermittle den Scheinwiderstand $Z\,\underline{/\varphi}$, die Stromstärke J und die Teilspannungen an den Einzelwiderständen (u_R, u_L, u_C).

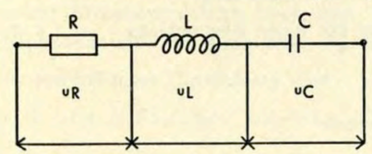


Fig. 4

$Z\,\underline{/\varphi} = R + j\,\omega L - \dfrac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$

wobei $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 50 \cdot \pi = 314\ S^{-1}$ und

damit $\omega L = 0{,}25 \cdot 314 = 78{,}5$ und

$\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{10^6}{314 \cdot 35} = 91$ Vektorohm ist.

$Z\,\underline{/\varphi} = 20 + j\,(78{,}5 - 91) = 20 - j\,12{,}5$
D 12,5 / Cl 10 / Cl 20 / T_1 **32°** // S 32° / Cl **23,6**
$Z\,\underline{/\varphi} = 23{,}6\,\underline{/-32^0}$; $J = U : Z = 220 : 23{,}6 = 9{,}33$ A
$u_R = 20 \cdot 9{,}33 = 186{,}6$ V; $u_L = 78{,}5 \cdot 9{,}33 = 73{,}2$ V;
$u_C = 91 \cdot 9{,}33 = 84{,}9$ V.

3. Ein Scheinwiderstand bestehend aus R_1 = 50 Ω in Reihe mit einer Induktivität L = 0,16 H liegt parallel mit einem zweiten Scheinwiderstand, welcher aus R_2 = 40 Ω und einer in Reihe geschalteter Kapazität C = 22 μF besteht.
   An der Gesamtschaltung liegt eine Wechselstromspannung von U = 500 V und f = 60 Hz.

Bestimme den komplexen Gesamtwiderstand und den Gesamtstrom J.

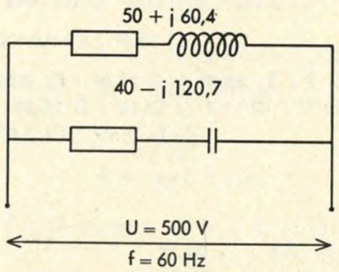


Fig. 5

$$\underline{Z/\varphi} = \frac{Z_1/\underline{\varphi 1} \cdot Z_2/\underline{\varphi 2}}{(R_1 + j\,\omega\, L) + (R_2 - \frac{j}{\omega C})}$$

$$\omega L = 2 \cdot 60 \cdot \pi \cdot 0{,}16 = 60{,}4 \text{ Vektorohm}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2 \cdot 60 \cdot \pi \cdot 22} = 120{,}7 \text{ Vektorohm}$$

$$\underline{Z/\varphi} = \frac{78{,}4\ /\underline{50{,}4^0} \cdot 127\ /\underline{-71{,}7^0}}{(50 + j\,60{,}4) + (40 - j\,120{,}7)}$$

D 60,4 / Cl 1 // Cl 50 / T_2 **50,4°**; D 60,4 / Cl 10 // S 50,4° / Cl **78,4**

D 120,7 / Cl 10 // Cl 40 / T_2 **71,7°** // S 71,7° / Cl **127**

$$Z/\varphi = \frac{78{,}4 \cdot 127\ /\underline{-21{,}3^0}}{90 - j\,60{,}3} = \frac{9940\ /\underline{-21{,}3^0}}{108\ /\underline{-33{,}8^0}}$$

D 60,3 / Cl 10 // Cl 90 / T_1 **33,8°** // S 33,8° / Cl **108**

$$\underline{Z/\varphi} = 92\ /\underline{12{,}5^0}$$

Der Gesamtstrom ist dann 500 : 92 = 5,44 A. Die Phasenverschiebung beträgt 12,5°.

4. An einer Wechselstromspannung von 120 V (f = 60 Hz) liegt ein Ohm'scher Widerstand R = 20 Ω und eine Selbstinduktivität L in Reihenschaltung.

Errechne die Induktivität L und den Phasenwinkel bei einer Stromstärke I = 1,5 A.

$$\mathfrak{Z} = \underline{Z/\varphi} = R + jX = R + j\,\omega\, L$$

Hierbei ist: Z = U : I = 120 : 1,5 = 80 Vektorohm

und $\omega = 2\pi f = 377_s{}^{-1}$

$$\mathfrak{Z} = 80/\underline{\varphi} = 20 + j\,\omega\, L$$

Gemäß Fig. 1 erhält man a : r = cos φ bzw. 20 . 80 = cos φ

D 20 / Cl 10 // Cl 80 / S (90°—14,5°) bzw. CS 75,5°

$$\mathfrak{Z} = 80/\underline{75{,}5^0} = 20 + j\,77{,}5$$

S 75,5° / Cl 80 // Cl 10 / 77,5

$$L = \frac{77{,}5}{377} = 0{,}205 \text{ H}; \quad \varphi = 75{,}5^0$$

Das HORNERsche Rechenschema

von Dr.-Ing. Eugen Moeller, Darmstadt

G. W. HORNER hat i. J. 1819 ein Rechenschema angegeben, das für die numerische Behandlung von Polynomen wichtig ist, da es die Rechenarbeit erleichtert und auch für die Benutzung des Rechenstabs besonders gut geeignet ist.

Wir beschränken uns hier der kurzen Schreibweise wegen auf Polynome 3. Grades; die Erweiterung der Methode auf algebraische Gleichungen höheren Grades und die Verallgemeinerungen sind ohne weiteres möglich.

Das Ergebnis des folgenden Ausdrucks soll für einen bestimmten Wert der Veränderlichen x berechnet werden:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$$

Nach HORNER schreiben wir die Koeffizienten der Veränderlichen in fallender Reihenfolge der Potenzen an und addieren zu ihnen die darunter angeschriebenen und mit den gegebenen Koeffizienten in der ersichtlichen Weise zusammenhängenden Größen.

$$\begin{array}{cccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
- & + b_3x & + b_2x & + b_1x \\
\hline
= b_3 & = b_2 & = b_1 & = b_0
\end{array}$$

Es ist hiernach

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_3 \\
b_2 &= a_3x + a_2 \\
b_1 &= a_3x^2 + a_2x + a_1 \\
b_0 &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \mathbf{f(x)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Zur Berechnung von b_0 nach dem HORNERschema mittels des **Rechenstabs** stellt man einen Schieberendstrich über dem Wert von x ein und liest die einzelnen Produkte gegenüber den Schieberwerten b_3, b_2 und b_1 ab.

In symbolischer Darstellung also:

C 1 / Dx // Cb_3/Db_3x; Cb_2/Db_2x; Cb_1/Db_1x

Zahlenbeispiel $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ soll für den Wert x = 2,5 berechnet werden.

Das HORNERschema hierfür lautet

$$\begin{array}{cccc}
1 & -6 & 11 & -6 \\
- & +2{,}5 & -8{,}75 & +5{,}625 \\
\hline
=1 & =-3{,}5 & =2{,}25 & =-0{,}375
\end{array}$$

Rechenstab-Einstellung:
C 1 / D 2,5 // C 3,5 / D 8,75
C 2,25 / D 5,625

Man findet die Lösung f (x) = —0,375.

Das HORNERschema läßt sich in der oben gezeigten Weise durch die entsprechende Bildung neuer Zeilen unter Wegfall des jeweils letzten Gliedes ergänzen und vervollständigen. Wir wiederholen die Reihe b und fügen die Reihe c an.

b_3	b_2	b_1
—	$+c_3x$	$+c_2x$
$=c_3$	$=c_2$	$=c_1$

Demnach ist

$$c_3 = a_3$$
$$c_2 = a_3x + (a_3x + a_2) = 2a_3x + a_2$$
$$c_1 = (2a_3x^2 + a_2x) + (a_3x^2 + a_2x + a_1)$$
$$= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = \mathbf{f'(x)}$$

Die weitere Verfolgung ergibt

$$d_2 = f''(x)/2!$$

und

$$e_3 = f'''(x)/3!$$

Man kann daher auch schreiben

$$b_0 = f(x)/0!$$

und

$$c_1 = f'(x)/1!$$

was die Verallgemeinerung erleichtert.

Die Werte f (x) und f' (x) und bei Verfeinerung des Verfahrens auch höhere Ableitungen mit einem Näherungswert einer Wurzel des Polynoms können nach NEWTON dazu dienen, den **Näherungswert zu verbessern.**

Man wiederhole den Ausdruck

$$x - f(x) : f'(x)$$

mit dem auf diese Art verbesserten Wert von x so lange, bis das Ergebnis befriedigt.

Zahlenbeispiel

Eine Wurzel des Polynoms

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

werde zu 0,8 angenommen. Es wird ein besserer Wert gesucht.

HORNERschema:					**Rechenstab-Einstellung:**
	1	—6	11	—6	
	—	+0,8	—4,16	+5,472	C 10 / D 0,8 // C 5,2 / D 4,16
	=1	=—5,2	=6,84	=—0,528 = f (x)	C 6,84 / D 5,472
	—	+0,8	—3,52		C 4,4 / D 3,52
	=1	=—4,4	=3,32 = f' (x)		

Der verbesserte Wert ist $0{,}8 + 0{,}528 : 3{,}32 = 0{,}959$.

Neue Rechnung mit x = 0,96:

				Rechenstab-Einstellung:
1	—6	11	—6	C 10 / D 0,96 // C 5,04 / D 4,83
—	+0,96	—4,83	+5,92	C 6,17 / D 5,92
=1	=—5,04	=6,17	=—0,08 = f (x)	C 4,08 / D 3,92
—	+0,96	—3,92		
=1	=—4,08	=2,25 = f' (x)		

Ein besserer Wert ist nun $0{,}96 + 0{,}08 : 2{,}25 = 0{,}9956$.

Der wahre Wert der Wurzel ist x = 1.

Um eine **kubische Gleichung**

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zu reduzieren, setzt man bekanntlich

$$x = y - a : 3$$

wodurch das quadratische Glied aus der Gleichung wegfällt.

Wir zeigen dies nun an Hand des HORNERschemas.

1	a	b	c
—	—a:3	$—2a^2:9$	$+2a^3:27 — ab:3$
=1	=2a:3	$=b — 2a^2:9$	$= c + 2a^3:27 — ab:3$ = absolutes Glied
—	—a:3	$— a^2:9$	
=1	= a:3	$=b — a^2:3$ = Koeffizient von y	
—	—a:3		
=1	= 0 = Koeffizient von y^2		
—			
=1 = Koeffizient von y^3			

Zahlenbeispiel $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$$x = y + 2$$

HORNERschema:

1	—6	11	—6
—	+2	—8	+6
=1	=—4	=3	=0
—	+2	—4	
=1	=—2	=—1	

Man findet

$$y^3 - y = 0$$

oder

$$y(y+1)(y-1) = 0$$

Es ergibt sich augenscheinlich

$y_1 = 0$	und daher	$x_1 = 2$
$y_2 = -1$		$x_2 = 1$
$y_3 = 1$		$x_3 = 3$

Wenn ein Polynom lauter reelle Koeffizienten hat, sind **komplexe Wurzeln** nur paarweise konjugiert komplex möglich gemäß der Beziehung $x_{1,2} = u \pm iv$. Nach COLLATZ (ZAMM 1940) ist es zweckmäßig, mit dem Produkt $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + (u^2 + v^2) - 2ux$ zu operieren, da man es dann nur mit reellen Faktoren zu tun hat.

Das HORNERschema wird nun **doppelzeilig** und hat in unserem Falle die Form

	a_3	a_2	a_1	a_0
$-(u^2+v^2)$	—	—	$-(u^2+v^2)\,b_3$	$-(u^2+v^2)\,b_2$
$2u$	—	$+2ub_3$	$+2ub_2$	—
	$= b_3$	$= b_2$	$= \mathbf{b_1}$	$= \mathbf{b_0}$

Die Lösung lautet $\mathbf{f(x) = b_1(u \pm iv) + b_0}$

Zahlenbeispiel $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = f(x)$

$$x = 3 \pm 2i$$

Doppelzeiliges HORNERschema:

	1	—6	11	—6
—13	—	—	—13	+0
6	—	+6	+0	—
	=1	=0	=—2	=—6

Man erhält demnach

$$f(x) = -2(3 \pm 2i) - 6 = -12 \mp 4i$$

Das doppelzeilige HORNERschema läßt sich entsprechend dem einzeiligen Schema fortsetzen; Näheres hierüber siehe in der Arbeit von ZURMÜHL (ZAMM 1950).

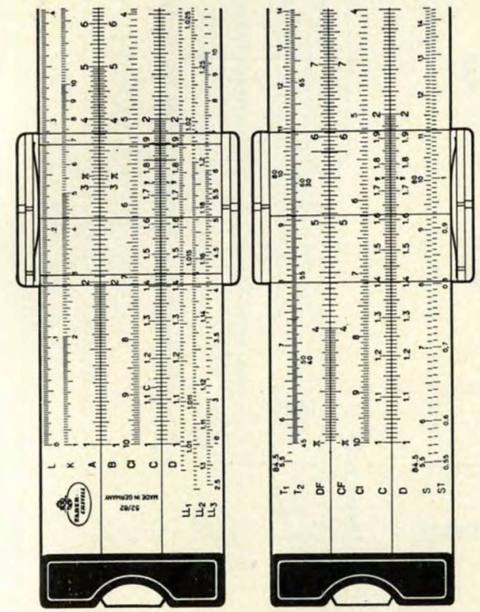
MESSE-HINWEISE

Gern begrüßen wir Sie an unserem Stand auf folgenden Ausstellungen:

MNU-Lehrmittelausstellung anläßlich der 53. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. im Eberhard-Ludwig-Gymnasium, **Stuttgart,** Herdweg 72, vom 16. bis 18. April 1962.

Deutsche Industrie-Messe in Hannover, Messegelände, Halle 17, Stand 1220/1321, vom 29. April bis 8. Mai 1962.

Lehrmittelausstellung anläßlich der 28. Tagung zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Universität und Höherer Schule, **Münster**/Westf., Universität (Schloß), 15. u. 16. 6. 1962.



CASTELL SCHUL-D-STAB 52/82

jetzt mit d r e i Exponentialskalen

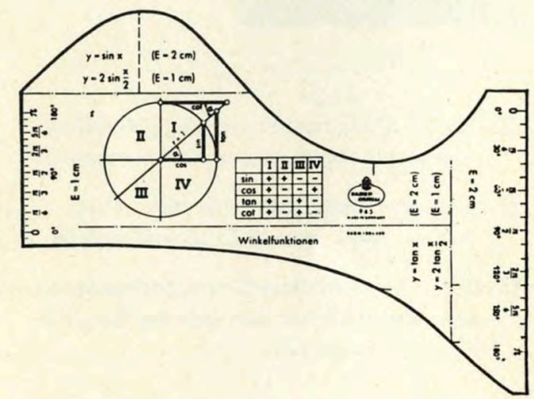
Zu den bisherigen Exponentialskalen LL_2 und LL_3 des bewährten CASTELL Schul-D-Stabes 52/82 hat sich nun die LL_1-Skala ($e^{0,01x}$) gesellt. Die Aufnahme dieser d r i t t e n Exponentialskala stellt eine bedeutsame Verbesserung des Rechenstabes 52/82 dar, da sich sein Gebrauchsumfang hierdurch erheblich erweitert, namentlich für Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Der CASTELL Schul-D-Stab wird somit umfassenden Ansprüchen gerecht, wie sie im Unterricht an Höheren Lehranstalten und Fachschulen an einen modernen Rechenstab gestellt werden.

Er vereint die Exponentialskalen LL_1, LL_2, LL_3, die π-versetzten Skalen CF, DF, die Skalen des Systems Rietz und die 2. Tangensskala T_2 über 45^0. Die Hauptskalen auf Vorder- und Rückseite sind mit einem augenschonenden hellgrünen Farbstreifen unterlegt und treten dadurch stärker hervor. Läufer und Zunge können ungehindert bewegt werden, wenn der Stab auf der Tischplatte liegt. Jeder Stab wird in einem stabilen, durchsichtigen Plastiketui geliefert und ist mit einer ausführlichen Anleitung versehen.

Sinus-Tangens-Schablone 945

Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigem Celluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.



Sinus-Tangens-Schablone 945 D: Unter dieser Nummer ist die Sinus-Tangens-Schablone als **Wandtafelgerät** lieferbar.